Université Abdelmalek Essaadi
ENSA D'AL-Hoceima
Année Préparatoire, Première année
Année universitaire 2019/2020

Examen Session d'Automne : Analyse Réelle, 2 heures

N.B. : Il sera tenu compte de la rédaction, la justification de réponses et la clarté de l'écriture.

Exercice 1 *(5 points)*

On considère les fonctions données par $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Qu'appelle-t-on les deux fonctions ch et sh ?
2. Montrer que $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ et $\text{ch}(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Étudier la fonction ch ; puis déduire la monotonie de la fonction ch.
4. Soit $f = \text{ch}\lfloor_{]-\infty,0]} :]-\infty; 0] \to [1; +\infty[$ et $g = \text{ch}\lfloor_{[0,+\infty[} : [0, +\infty] \to [1; +\infty[$ les restrictions de ch à $]-\infty; 0]$ et à $[0; +\infty[$, respectivement.
   (a) Montrer que f et g sont bijectives. f et g sont-elle des homeomorphismes ? **Justifier**
   (b) Montrer que $\text{sh}(x) = -\sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}, \quad \forall x \leq 0$ et que $\text{sh}(x) = \sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}, \quad \forall x \geq 0$.
   (c) Déduire que
   $$e^x = \text{ch}(x) - \sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}, \quad \forall x \leq 0 \quad \text{et} \quad e^x = \text{ch}(x) + \sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}, \quad \forall x \geq 0.$$
   (d) Déterminer les expressions de f^{-1} et de g^{-1}. Laquelle des deux fonctions soit appelée argch ?
5. Résoudre l'équation $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$.

Exercice 2 *(5 points)*

Pour α un réel positif fixé, on considère l'intégrale : $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha(x)dx$

1. (a) Établir une relation entre I_α et $I_{\alpha+2}$.
   (b) Montrer que la fonction f définie pour $\alpha \geq 0$ par : $f(\alpha) = (\alpha + 1)I_\alpha I_{\alpha+2}$ est périodique et que 1 est une période.
   (c) Calculer $f(0)$.
2. On considère la fonction g définie par $g : \alpha \longmapsto g(\alpha) = I_\alpha$
   (a) Montrer que la fonction g est décroissante.
   (b) Déduire que : $p \leq \alpha < p + 1 \Rightarrow \dfrac{p+1}{p+2}f(0) < f(\alpha) < \dfrac{p+2}{p+1}f(0)$
   (c) Déterminer la limite de la suite de terme général $f(\alpha+n)$ et montrer que la fonction f est constante.
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{I_{\alpha+1}}{I_\alpha} = 1$, et déterminer un équivalent simple de I_α.

Exercice 3 *(5 points)*

1. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{si} \quad x < 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$
   (a) Montrer que $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$ existent ; et que f est dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ qu'il faut préciser.
   (b) Montrer que f satisfait aux hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[0;2]$.
   (c) Déterminer toutes les valeurs c telles que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.
2. Soit G la fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + t^2 + 1} = \int_0^{2x} \frac{dt}{t^4 + t^2 + 1} - \int_0^x \frac{dt}{t^4 + t^2 + 1}$$

   (a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$; puis calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (**Indication** : si $F(y) = \displaystyle\int_0^y f(t)dt$, alors $F'(y) = f(y)$).
   (b) Déterminer un développement limité d'ordre 5 de G au voisinage de 0. Déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_G$ en 0.

Exercice 4 *(5 points)*

On considère les suites de fonctions f_n et g_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = x^n \quad \text{et} \quad g_n(x) = f_n(x) - x\, f_n(x)$$

1. Exprimer $g_n(x)$ en fonction de x ; puis étudier, pour tout réel $x \in [0,1]$, les limites des suites numériques $f_n(x)$ et $g_n(x)$.
2. Montrer que la suites $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément dans tout intervalle $[0,a]$ tel que $0 < a < 1$.
3. Étudier la convergence uniforme des suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ dans l'intervalle $[0,1]$.